MVE340 Matematik B för Sjöingenjörer
2010/2011
Läsvecka 2, 3 och del av 4
Deltenta 2

Omfattning

- Emanuelsson:
  - Kapitel 3: Derivator 3.8, 3.9, 3.11
  - Kapitel 4, Integraler 4.1-4, 4.6-7

Kapitel 3: Användning av derivator

Viktiga begrepp

- Newtons metod för ekvationslösning
- Grafritning med stöd av derivata
- Största och minsta värde till funktion på ett intervall

Mål kapitel 3

För betyget godkänd skall du kunna:

3.8 använda Newtons metod för ekvationen $f(x) = 0$ då derivatan är enkel att beräkna

3.9 skissa grafen till en funktion med hjälp av derivatan då derivatan är enkel att beräkna

3.11 bestämma största/minsta värde för en funktion på ett slutet intervall med hjälp av derivatans nollställen då derivatan är enkel att beräkna

För högre betyg skall du dessutom kunna:

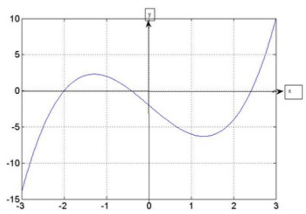
3.8,9,11 lösa problem enligt ovan då deriveringen är mer komplicerad

Newtons metod för $f(x) = 0$

- Vi vill bestämma en positiv rot till ekvationen
$$x^3 - 5x - 2 = 0.$$
- Lösning:
  - Först hittar vi ett intervall som innehåller ett nollställe till funktionen $f(x) = x^3 - 5x - 2$.
  - Vi väljer sedan ett lämpligt startvärde x_0, ett x-värde som ligger hyfsat nära en rot.
  - ‡ Tangenten till kurvan y $= x^3 - 5x - 2$ genom punkten $(x_0, f(x_0))$ skär x- axeln i en punkt $(x_1, 0)$.
  - x_1 är troligen en bättre approximation till roten än vad x_0 är. Vi byter ut x_0 mot x_1 och upprepar ‡

Newtons metod

- Vi ritar grafen



- och ser att $x_0 = 2$ är en bra start

Mål: skissa grafen till en funktion med hjälp av derivatan då derivatan är enkel att beräkna

- Vi skissar grafen till $f(x) = x^3 - 5x - 2$.
  - Definitionsmängden är alla reella tal. Vi väljer först ett ”lagom” intervall där vi ritar grafen., t.ex. $-4 \leq x \leq 4$
  - Värdetabell som vanligt
  - Beräkna derivatan och se hur derivatans tecken varierar. Drag slutsatser om växande/avtagande för $f(x)$.
  - Utöka intervallet till ”hela” definitionsmängden.

Mål: bestämma största/minsta värde för en funktion på ett slutet intervall med hjälp av derivatans nollställen då derivatan är enkel att beräkna

- Vi bestämmer största och minsta värde till

$$f(x) = x^4 - 4x^2 - 2$$

på intervallet $-3 \leq x \leq 4$

- Lösning: Vi skissar grafen och drar slutsatser.

Kapitel 4: Integraler

Viktiga begrepp

- Integralen som en generaliserad summa.
- Numerisk beräkning av integral
- Beräkning av integral med hjälp av antiderivata, primitiv funktion
- Satser för integralberäkning

Mål kapitel 4

För betyget godkänd skall du kunna:
4.1 ställa upp en integral för beräkning av area
4.1 ställa upp en integral för beräkning av medelvärde av en funktion på ett intervall
4.2 beräkna integral då primitiv funktion är lätt att bestämma
4.6 beräkna integral med hjälp av föreslagen partiell integration
4.7 beräkna integral med hjälp av föreslagen substitution

För högre betyg skall du dessutom kunna:
Kap. 4 själv avgöra vilken integrationsteknik som är lämplig

Medelvärdesberäkning

- Diverse exempel med medelhastighet.
- Diverse exempel med medelhöjd

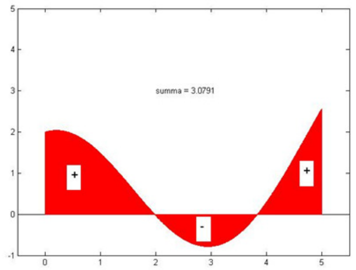
Integralens definition

- $\int_a^b f(x)dx$ är en generaliserad summa:
  - Intervallet $[a,\ b]$ delas in i smådelar $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_n = b$
  - i varje delintervall väljs en punkt x_i^*
  - Vi adderar alla produkterna $f(x_i^*)\ \Delta_i$ där Δ_i är delintervallets längd.
  - Då antalet delintervall går mot ∞ och längsta delintervallets längd går mot 0 närmar sig summan i steget ovanför ett värde.
  - OM $f(x)$ är kontinuerlig så är detta gränsvärde samma oavsett vilka indelningar vi gör och vilka punkter vi väljer.
  - Gränsvärdet är integralen $\int_a^b f(x)dx$

Tolkning av integral

- Värdet på en integral $\int_a^b f(x)dx$ kan uppfattas som summan av areor av områden under grafen och över x-axeln minus areor av motsvarande områden under x-axeln och över grafen.

”Area med tecken”

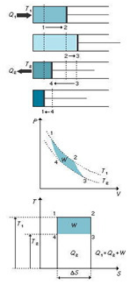


Vad kan beräknas med en integral?

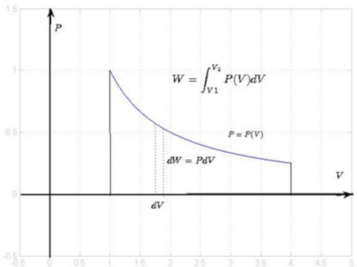
- Svårt att säga något generellt men på ett ungefär gäller:

Allting som kan beräknas som en produkt av två storheter, där den ena beror på den andra, kan beräknas med en integral.

Carnotprocess (bild ur NE)



Arbete som integral



Numerisk beräkning av integral

- Dela in intervallet i ett antal (n) delar, (n+1 jämnt fördelade punkter inklusive ändpunkterna).
- Approximera funktionen med räta linjer mellan motsvarande punkter på grafen.
- Beräkna areorna av delarna, addera (med tecken). Då får du
- Trapetsformeln:
- $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2n}\left(\boldsymbol{f(a)} + \boldsymbol{2}\big(\boldsymbol{f(x_1)} + \boldsymbol{f(x_2)} + \boldsymbol{f(x_3)} + \cdots + \boldsymbol{f(x_{n-1})}\big) + f(b)\right)$

Numerisk beräkning av integral 2

- Dela in intervallet i ett antal (n) delar, lägg till alla mittpunkter. Du har då 2n+1 jämnt fördelade punkter inklusive ändpunkterna.
- Approximera funktionen med andragradskurvor genom de tre punkterna på grafen som motsvarar delningspunkterna och mittpunkterna.
- Beräkna areorna av delarna, addera (med tecken). Då får du
- Simpsons formel:
- $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6n}\left(\boldsymbol{f(a)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})}+f(b)\right)$

Primitiv funktion – antiderivata

- En primitiv funktion till $f(x)$ är en funktion $F(x)$ som uppfyller att
$$F'(x) = f(x)$$
- Eftersom derivatan av en konstant C är 0 kan man alltid addera en godtycklig konstant till en primitiv funktion till $f(x)$ och få en annan primitiv funktion till $f(x)$.
- Om $F(x)$ och $G(x)$ har samma derivata så skiljer de sig åt endast på en konstant.

Primitiv funktion – antiderivata

- Slutsats: Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så får man alla andra genom att addera konstanter till $F(x)$.
- Man skriver $\int f(x)dx = F(x) + C$
- Att beräkna den obestämda integralen $\int f(x)dx$ är samma som att bestämma alla primitiva funktioner till $f(x)$.

Huvudsatsen

- $\int_a^x f(t)dt$ är en funktion av x.
- Den är deriverbar och har derivatan
- $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$
- Med andra ord:

$G(x) = \int_a^x f(t)dt$ är den primitiva funktion till $f(x)$ som uppfyller $G(a) = 0$.

Insättningsformeln

- $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ alltså en funktion som uppfyller att $F'(x) = f(x)$

Insättningsformeln

- $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ är den primitiva funktion till $f(x)$ som uppfyller $G(a) = 0$.
- Dessutom är $G(b) = \int_a^b f(t)dt$
- Om $F(x)$ är en (annan) primitiv funktion till $f(x)$ så är $F(x) = G(x) + C$.
- Speciellt får vi

$$F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C)$$
$$= G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Partiell integration

- $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b \; - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Substitution i obestämd integral

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx =$$

$$\{t = g(x), dt = g'(x)dx\} =$$

$$\int f(t)dt$$

Substitution i bestämd integral

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx =$$

$$\left\{\begin{matrix} t = g(x), dt = g'(x)dx \\ x = a \Rightarrow t = g(a), x = b \Rightarrow t = g(b) \end{matrix}\right\}$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$